

---

Jürgen Tietze

# Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik

Das praxisnahe Lehrbuch –  
inklusive Brückenkurs für Einsteiger

17., erweiterte Auflage

Mit 500 Abbildungen und mehr als 1700  
Übungsaufgaben

 Springer Spektrum

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	V
Symbolverzeichnis .....	XIII
Abkürzungen, Variablenamen .....	XIV
<b>1 Grundlagen und Hilfsmittel .....</b>	<b>1</b>
1.1 Mengen und Aussagen .....	1
1.1.1 Mengenbegriff .....	1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen .....	3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen .....	5
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen .....	9
1.1.4.1 Konjunktion .....	9
1.1.4.2 Disjunktion .....	9
1.1.4.3 Negation .....	11
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen .....	11
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz .....	14
1.1.5.1 Folgerung (Implikation) .....	14
1.1.5.2 Äquivalenz .....	15
1.1.6 Relationen zwischen Mengen .....	16
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen .....	16
1.1.6.2 Teilmengen .....	16
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen .....	17
1.1.7.1 Durchschnittsmenge .....	17
1.1.7.2 Vereinigungsmenge .....	18
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge) .....	18
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen .....	21
<b>1.2 Elementare Algebra im Bereich der reellen Zahlen <math>\mathbb{R}</math></b>	
<b>Brückenkurs (BK) .....</b>	<b>23</b>
Eingangstest .....	24
Eingangstest - Aufgaben .....	25
BK1 Thema: Axiome (Grundregeln) der Algebra in $\mathbb{R}$ .....	27
BK 1.1 Die neun Axiome (Grundregeln) der Algebra in $\mathbb{R}$ .....	27
BK 1.2 Subtraktion und Division - Differenzen und Brüche .....	32
BK 1.3 Konventionen/Vereinbarungen zur Reihenfolge der Operationen .....	33
Selbstkontroll-Test zu Thema BK1 .....	35
BK2 Thema: Termumformungen in $\mathbb{R}$ - aus den Axiomen abgeleitete Rechenregeln .....	36
BK 2.1 0/1-Regeln und Vorzeichenregeln; Multiplikation von Summen, insb. „Binomische Formeln“ .....	38
BK 2.2 Brüche und algebraische Bruchterme: Multiplikation/Division zweier Brüche, Kürzen und Erweitern von Brüchen, Addition/Subtraktion zweier Brüche .....	43
BK 2.3 Wann ist ein Produkt/Quotient Null? Konsequenzen für Gleichungen Selbstkontroll-Test zu Thema BK2 .....	51
Selbstkontroll-Test zu Thema BK2 .....	53
BK3 Thema: Einige spezielle mathematische Begriffe und Symbole (Exkurs) .....	54
BK 3.1 (absoluter) Betrag einer Zahl/eines Terms .....	54
BK 3.2 Das Summenzeichen .....	55

	BK 3.3 Das Produktzeichen .....	60
	BK 3.4 Fakultät und Binomialkoeffizient .....	61
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK3 .....	64
BK4	Thema: Potenzen und Wurzeln .....	65
	BK 4.1 Potenzen mit natürlichen und ganzzahligen Exponenten .....	65
	BK 4.2 Rechenregeln für Potenzen .....	70
	BK 4.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln .....	76
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK4 .....	83
BK5	Thema: Logarithmen .....	85
	BK 5.1 Begriff des Logarithmus .....	85
	BK 5.2 Rechenregeln für Logarithmen .....	90
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK5 .....	94
BK6	Thema: Gleichungen .....	96
	BK 6.1 Allgemeines zu Gleichungen und ihren Lösungen .....	96
	BK 6.2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen .....	99
	Exkurs: Beliebte Fehlerfallen bei der Gleichungsumformung .....	107
	BK 6.3 Lineare Gleichungen .....	115
	BK 6.4 Quadratische Gleichungen .....	117
	BK 6.5 Gleichungen höheren als 2. Grades, Substitution, Polynomdivision ..	125
	BK 6.6 Bruchgleichungen .....	129
	BK 6.7 Wurzelgleichungen und Potenzgleichungen .....	130
	BK 6.8 Exponentialgleichungen .....	134
	BK 6.9 Logarithmengleichungen .....	137
	BK6.10 Exkurs: Lineare Gleichungssysteme .....	138
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK6 .....	142
BK7	Thema: Ungleichungen .....	144
	Rechenregeln für Ungleichungen – Monotoniegesetze .....	144
	Lösungsverfahren für Ungleichungen .....	146
	Selbstkontroll-Test zu Thema BK7 .....	149
	Abschluss-Test .....	150
<b>2</b>	<b>Funktionen einer unabhängigen Variablen .....</b>	<b>153</b>
2.1	Begriff und Darstellung von Funktionen .....	153
2.1.1	Funktionsbegriff .....	153
2.1.2	Graphische Darstellung von Funktionen .....	158
2.1.3	Abschnittsweise definierte Funktionen .....	163
2.1.4	Umkehrfunktionen .....	165
2.1.5	Implizite Funktionen .....	170
2.1.6	Verkettete Funktionen .....	171
2.2	Eigenschaften von Funktionen .....	172
2.2.1	Beschränkte Funktionen .....	172
2.2.2	Monotone Funktionen .....	173
2.2.3	Symmetrische Funktionen .....	175
2.2.4	Nullstellen von Funktionen .....	176
2.3	Elementare Typen von Funktionen .....	176
2.3.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome) .....	176
2.3.1.1	Grundbegriffe, Horner-Schema .....	177
2.3.1.2	Konstante und lineare Funktionen .....	178
2.3.1.3	Quadratische Funktionen .....	185
2.3.1.4	Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung .....	187
2.3.2	Gebrochen-rationale Funktionen .....	190
2.3.3	Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen) .....	192
2.3.4	Exponentialfunktionen .....	194

2.3.5	Logarithmusfunktionen .....	196
2.3.6	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen) .....	197
2.4	Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi) .....	203
2.5	Beispiele ökonomischer Funktionen .....	207
<b>3</b>	<b>Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....</b>	<b>229</b>
3.1	Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....	229
3.2	Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen .....	230
3.3	Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .....	239
<b>4</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen .....</b>	<b>243</b>
4.1	Der Grenzwertbegriff .....	243
4.1.1	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$ .....	244
4.1.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$ ) .....	248
4.2	Grenzwerte spezieller Funktionen .....	254
4.3	Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen .....	257
4.4	Der Stetigkeitsbegriff .....	261
4.5	Unstetigkeitstypen .....	263
4.6	Stetigkeitsanalyse .....	265
4.7	Stetigkeit ökonomischer Funktionen .....	268
4.8	Asymptoten .....	271
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen – Grundlagen und Technik .....</b>	<b>275</b>
5.1	Grundlagen der Differentialrechnung .....	275
5.1.1	Problemstellung .....	275
5.1.2	Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung), Differenzenquotient .....	275
5.1.3	Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient) .....	277
5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit .....	281
5.2	Technik des Differenzierens .....	282
5.2.1	Die Ableitung der Grundfunktionen .....	283
5.2.1.1	Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = c$ .....	283
5.2.1.2	Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ .....	283
5.2.1.3	Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ .....	284
5.2.1.4	Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ .....	285
5.2.2	Ableitungsregeln .....	287
5.2.2.1	Faktorregel .....	287
5.2.2.2	Summenregel .....	287
5.2.2.3	Produktregel .....	288
5.2.2.4	Quotientenregel .....	289
5.2.2.5	Kettenregel .....	291
5.2.3	Ergänzungen zur Ableitungstechnik .....	294
5.2.3.1	Ableitung der Umkehrfunktion .....	294
5.2.3.2	Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	296
5.2.3.3	Logarithmische Ableitung .....	298
5.2.4	Höhere Ableitungen .....	299
5.2.5	Zusammenfassung der wichtigsten Differentiationsregeln .....	301
5.3	Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken – Regeln von de L'Hôpital .....	302
5.4	Newton-Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion .....	309
<b>6</b>	<b>Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen .....</b>	<b>313</b>
6.1	Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung .....	313
6.1.1	Das Differential einer Funktion .....	313

6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion	316
6.1.2.1	Grenzkosten	318
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben)	319
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag)	320
6.1.2.4	Grenzzugewinn	322
6.1.2.5	Marginale Konsumquote	323
6.1.2.6	Marginale Sparquote	323
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution	324
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion	325
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen	328
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten	329
6.2.2	Extremwerte	332
6.2.3	Wendepunkte	336
6.2.4	Kurvendiskussion	338
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen	344
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme	346
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen	346
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen	347
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften	350
6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen	352
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse	353
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen	356
6.3.2.3	Gewinnmaximierung	358
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion	365
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung	367
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen	377
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen	377
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen	379
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen	384
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität	390
6.3.4	Überprüfung ökonomischer „Gesetze“ mit Hilfe der Differentialrechnung	395
<b>7</b>	<b>Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen</b>	<b>401</b>
7.1	Grundlagen	401
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen	401
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen	406
7.1.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	407
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen	409
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential	411
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung	413
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen	416
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	420
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen	420
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen	422
7.2.2.1	Problemstellung	422
7.2.2.2	Variablensubstitution	424
7.2.2.3	Lagrange-Methode	424
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	428
7.3.1	Partielle Elastizitäten	428
7.3.1.1	Begriff der partiellen Elastizität	428
7.3.1.2	Die Eulersche Homogenitätsrelation	429
7.3.1.3	Elastizität homogener Funktionen	430

7.3.1.4	Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes	433
7.3.2	Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen)	438
7.3.2.1	Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion	438
7.3.2.2	Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmungen	442
7.3.2.3	Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung	447
7.3.2.4	Die Methode der kleinsten Quadrate	450
7.3.3	Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen	453
7.3.3.1	Minimalkostenkombination	453
7.3.3.2	Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion	459
7.3.3.3	Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum	463
7.3.3.4	Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen	469
<b>8</b>	<b>Einführung in die Integralrechnung</b>	<b>477</b>
8.1	Das unbestimmte Integral	477
8.1.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	477
8.1.2	Grundintegrale	480
8.1.3	Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral	481
8.2	Das bestimmte Integral	483
8.2.1	Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals	483
8.2.2	Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals	485
8.2.3	Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals	486
8.3	Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	488
8.3.1	Integralfunktion	488
8.3.2	Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	489
8.3.3	Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	491
8.3.4	Flächeninhaltsberechnung	492
8.4	Spezielle Integrationstechniken	494
8.4.1	Partielle Integration	495
8.4.2	Integration durch Substitution	496
8.5	Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung	498
8.5.1	Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen	498
8.5.2	Die Konsumentenrente	501
8.5.3	Die Produzentenrente	502
8.5.4	Kontinuierliche Zahlungsströme	504
8.5.5	Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft	508
8.5.6	Optimale Nutzungsdauer von Investitionen	509
8.6	Elementare Differentialgleichungen	513
8.6.1	Einleitung	513
8.6.2	Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen	514
8.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen	517
8.6.3.1	Exponentielles Wachstum	517
8.6.3.2	Funktionen mit vorgegebener Elastizität	517
8.6.3.3	Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow	519
<b>9</b>	<b>Einführung in die Lineare Algebra</b>	<b>525</b>
9.1	Matrizen und Vektoren	525
9.1.1	Grundbegriffe der Matrizenrechnung	525
9.1.2	Spezielle Matrizen und Vektoren	529
9.1.3	Operationen mit Matrizen	530
9.1.3.1	Addition von Matrizen	530
9.1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor	532
9.1.3.3	Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt)	534
9.1.3.4	Multiplikation von Matrizen	535
9.1.4	Die inverse Matrix	542

9.1.5	Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse) . . . . .	544
9.2	Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . . .	549
9.2.1	Grundbegriffe . . . . .	549
9.2.2	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Gaußscher Algorithmus . . . . .	551
9.2.3	Pivotisieren . . . . .	557
9.2.4	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	562
9.2.5	Berechnung der Inversen einer Matrix . . . . .	567
9.2.6	Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme . . . . .	569
9.2.6.1	Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung . . . . .	569
9.2.6.2	Innerbetriebliche Leistungsverrechnung . . . . .	571
<b>10</b>	<b>Lineare Optimierung (LO)</b> . . . . .	<b>575</b>
10.1	Grundlagen und graphische Lösungsmethode . . . . .	575
10.1.1	Ein Problem der Produktionsplanung . . . . .	575
10.1.2	Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems . . . . .	576
10.1.3	Ein Diät-Problem . . . . .	578
10.1.4	Graphische Lösung des Diät-Problems . . . . .	579
10.1.5	Sonderfälle bei graphischer Lösung . . . . .	581
10.1.6	Graphische Lösung von LO-Problemen – Zusammenfassung . . . . .	584
10.2	Simplexverfahren . . . . .	586
10.2.1	Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems . . . . .	586
10.2.2	Grundidee des Simplexverfahrens . . . . .	588
10.2.3	Einführung von Schlupfvariablen . . . . .	588
10.2.4	Eckpunkte und Basislösungen . . . . .	589
10.2.5	Optimalitätskriterium . . . . .	591
10.2.6	Engpassbedingung . . . . .	592
10.2.7	Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall – Zusammenfassung . . . . .	594
10.2.8	Beispiel zum Simplex-Verfahren (Standard-Maximum-Problem) . . . . .	595
10.3	Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme . . . . .	597
10.4	Sonderfälle bei LO-Problemen . . . . .	604
10.4.1	Keine zulässige Lösung . . . . .	604
10.4.2	Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung) . . . . .	605
10.4.3	Degeneration (Entartung) . . . . .	605
10.4.4	Mehrdeutige optimale Lösungen . . . . .	607
10.4.5	Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen . . . . .	609
10.4.6	Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall . . . . .	610
10.5	Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus . . . . .	611
10.5.1	Produktionsplanungsproblem . . . . .	611
10.5.1.1	Problemformulierung, Einführung von Einheiten . . . . .	611
10.5.1.2	Optimaltableau und optimale Basislösung . . . . .	613
10.5.1.3	Deutung der Zielfunktionskoeffizienten . . . . .	613
10.5.1.4	Deutung der inneren Koeffizienten . . . . .	614
10.5.1.5	Zusammenfassung . . . . .	616
10.5.2	Diätproblem . . . . .	617
10.6	Dualität . . . . .	618
10.6.1	Das duale LO-Problem . . . . .	618
10.6.2	Dualitätssätze . . . . .	621
10.7	Ökonomische Interpretation des Dualproblems . . . . .	624
10.7.1	Dual eines Produktionsplanungsproblems . . . . .	624
10.7.2	Dual eines Diätproblems . . . . .	626
<b>11</b>	<b>Lösungshinweise zum Brückenkurs und zu ausgewählten Aufgaben</b> . . . . .	<b>629</b>
<b>12</b>	<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	<b>667</b>
<b>13</b>	<b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .	<b>671</b>