Bernd Luderer, Uwe Würker

Einstieg in die Wirtschaftsmathematik

5., überarbeitete und erweiterte Auflage

Teubner

B.G.Teubner Stuttgart • Leipzig • Wiesbaden

Inhaltsverzeichnis

Zeichenerklärung **13**

1 Grundlagen **15**

1.1 Instrumente der Elementarmathematik . . . 15
1.1.1 Zahlbereiche. Zahlendarstellung . . . 15
1.1.2 Rechnen mit Zahlen . . . 17
1.1.3 Bruchrechnung . . . 20
1.1.4 Potenzrechnung . . . 22
1.1.5 Binomische Formeln. Partialdivision . . . 24
1.1.6 Wurzelrechnung . . . 28
1.1.7 Logarithmenrechnung . . . 30
1.1.8 Rechenregeln und Auflösung von Gleichungen . . . 31
1.1.9 Koordinatensysteme . . . 35
1.1.10 Winkelbeziehungen . . . 38
1.1.11 Komplexe Zahlen . . . 38
1.2 Darstellung von Funktionen einer Variablen . . . 40
1.2.1 Formen der Darstellung . . . 42
1.2.2 Operationen mit Funktionen . . . 43
1.2.3 Wichtige spezielle Funktionen . . . 47
1.3 Ergänzende Fragen . . . 59
1.3.1 Intervalle . . . 59
1.3.2 Auflösung von Ungleichungen . . . 61
1.3.3 Absolute Beträge . . . 62
1.4 Analytische Geometrie . . . 64
1.4.1 Geradengleichungen in der Ebene . . . 65
1.4.2 Geraden und Ebenen im Raum . . . 70
1.4.3 Grafische Darstellung von Ungleichungssystemen . . . 72
1.5 Zahlenfolgen und Zahlenreihen . . . 74
1.5.1 Grundbegriffe . . . 74
1.5.2 Arithmetische Folgen und Reihen . . . 76
1.5.3 Geometrische Folgen und Reihen . . . 77
1.5.4 Grenzwerte von Zahlenfolgen . . . 78
1.5.5 Konvergenz von Reihen . . . 82

2 Logik und Mengenlehre 83
2.1 Aussagenlogik . . . 83
2.1.1 Aussagen . . . 83
2.1.2 Aussagenverbindungen . . . 85
2.1.3 Quantoren . . . 88
2.1.4 Einfache Schlussweisen . . . 89
2.2 Mengenlehre . . . 91
2.2.1 Grundbegriffe . . . 91
2.2.2 Mengenrelationen . . . 93
2.2.3 Mengenoperationen . . . 94
2.2.4 Abbildungen und Funktionen . . . 96

3 Finanzmathematik 99
3.1 Zins- und Zinseszinsrechnung . . . 99
3.1.1 Einfache Verzinsung . . . 100
3.1.2 Zinseszinsrechnung . . . 103
3.1.3 Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung . . . 104
3.1.4 Methoden der mehrperiodigen Investitionsrechnung . . . 106
3.1.5 Gemischte Verzinsung . . . 108
3.1.6 Unterjährige Verzinsung . . . 109
3.2 Rentenrechnung . . . 111
3.2.1 Grundbegriffe der Rentenrechnung . . . 111
3.2.2 Vorschüssige Renten . . . 112
3.2.3 Nachschüssige Renten . . . 113
3.2.4 Grundaufgaben der Rentenrechnung . . . 115
3.2.5 Ewige Rente . . . 117
3.3 Tilgungsrechnung . . . 119
3.3.1 Grundbegriffe. Formen der Tilgung . . . 119
3.3.2 Ratentilgung . . . 120
3.3.3 Annuitätentilgung . . . 120
3.3.4 Tilgungspläne . . . 122
3.4 Renditerechnung . . . 124

4 Lineare Algebra 129
4.1 Matrizen. Vektoren. Vektorräume . . . 129
4.1.1 Begriff der Matrix . . . 129
4.1.2 Spezielle Matrizen . . . 130
4.1.3 Matrizenrelationen . . . 132
4.1.4 Operationen mit Matrizen . . . 134
4.1.5 Lineare Vektorräume . . . 136
4.2 Matrizenmultiplikation . . . 138
4.2.1 Skalarprodukt . . . 138
4.2.2 Produkt von Matrizen . . . 139
4.2.3 Eigenschaften der Matrizenmultiplikation . . . 141
4.2.4 Anwendungen der Matrizenmultiplikation . . . 142
4.3 Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . 148
4.3.1 Begriff des linearen Gleichungssystems . . . 149
4.3.2 Darstellungsformen von LGS . . . 150
4.3.3 Begriff der Lösung eines LGS . . . 151
4.3.4 Lineare Gleichungssysteme mit Einheitsmatrix . . . 154
4.3.5 Elementare Umformungen eines LGS . . . 155
4.4 Gauß'scher Algorithmus . . . 156
4.4.1 Anwendung elementarer Umformungen . . . 156
4.4.2 Ablaufplan des Gauß'schen Algorithmus . . . 160
4.4.3 Lösungsdarstellung . . . 161
4.4.4 Numerische Aspekte . . . 163
4.4.5 Zusammenfassende Bemerkungen . . . 164
4.5 Lineare Unabhängigkeit . . . 167
4.5.1 Linearkombination . . . 167
4.5.2 Begriff der linearen Unabhängigkeit . . . 170
4.5.3 Basis und Rang . . . 172
4.5.4 Zur Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme . . . 176
4.6 Matrizeninversion . . . 177
4.6.1 Definition der inversen Matrix . . . 177
4.6.2 Anwendungen der Matrizeninversion . . . 181
4.7 Determinanten . . . 186
4.7.1 Definition der Determinante . . . 186
4.7.2 Eigenschaften von Determinanten . . . 189

4.7.3 Anwendungen der Determinantenrechnung 192
4.7.4 Definitheit von Matrizen 194
4.7.5 Die Cramer'sche Regel 196
4.7.6 Zusammenfassende Bemerkungen 197

5 Lineare Optimierung 199

5.1 Gegenstand der linearen Optimierung 200
5.1.1 Betrachtung einer Modellsituation 201
5.1.2 Bestandteile einer LOA. Lösungsbegriff . . . . ; . . 202
5.2 Modellierung und grafische Lösung von LOA 204
5.2.1 Modellierung typischer Problemstellungen 205
5.2.2 Grafische Lösung von LOA 211
5.3 Theorie der linearen Optimierung 221
5.3.1 Überführung in die Gleichungsform 221
5.3.2 Basislösungen und Eckpunkte 226
5.3.3 Eigenschaften von LOA 229
5.4 Simplexmethode für Optimierungsaufgaben in Gleichungsform . . 230
5.4.1 Grundidee 230
5.4.2 Auswahl der aufzunehmenden Basisvariablen 234
5.4.3 Auswahl der auszuschließenden Basisvariablen 235
5.4.4 Ablaufplan des Simplexalgorithmus 237
5.4.5 Beispiele. Rechenkontrollen 241
5.4.6 Sonderfälle 244
5.5 Zwei-Phasen-Methode 248
5.5.1 Grundidee 248
5.5.2 Mögliche Fälle 250
5.5.3 Beispiele 252
5.6 Dualität in der linearen Optimierung 254
5.6.1 Konstruktion der dualen Aufgabe 254
5.6.2 Dualitätsbeziehungen 257
5.6.3 Ökonomische Interpretation der Dualvariablen 259

6 Differenzialrechnung für Funktionen einer Variablen 266
6.1 Grenzwert und Stetigkeit . . . 266
6.1.1 Grenzwert von Funktionen . . . 267
6.1.2 Stetigkeit von Funktionen . . . 270
6.1.3 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . 271
6.2 Die Ableitung einer Funktion . . . 272
6.2.1 Das Tangentenproblem . . . 274
6.2.2 Differenzial . . . 277
6.2.3 Differenziationsregeln . . . 279
6.2.4 Höhere Ableitungen . . . 282
6.2.5 Taylor-Entwicklung einer Funktion . . . 283
6.3 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von Ableitungen . . . 287
6.3.1 Monotonie und Beschränktheit . . . 288
6.3.2 Extremwerte . . . 290
6.3.3 Wendepunkte. Krümmungsverhalten . . . 295
6.3.4 Kurvendiskussion . . . 299
6.3.5 Beispiele zur Kurvendiskussion . . . 302
6.3.6 Anwendungen in der Marginalanalyse . . . 305
6.4 Numerische Methoden der Nullstellenberechnung . . . 311
6.4.1 Intervallhalbierung . . . 313
6.4.2 Sekantenverfahren. Regula Falsi . . . 314
6.4.3 Newton-Verfahren . . . 316

7 Funktionen mehrerer Veränderlicher 318
7.1 Begriff und Beispiele . . . 318
7.1.1 Funktionsbegriff . . . 318
7.1.2 Beispiele für Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . 320
7.2 Grenzwert und Stetigkeit . . . 323
7.3 Differenziation von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . 329
7.3.1 Begriff der Differenzierbarkeit . . . 329
7.3.2 Partielle Ableitungen und Elastizitäten . . . 330
7.3.3 Gradient einer Funktion. Verschiedene Interpretationen . 334
7.3.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung. Hesse-Matrix . . 338
7.3.5 Vollständiges Differenzial . . . 339
7.3.6 Implizite Funktionen . . . 342

8 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher 347
8.1 Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . 347
8.1.1 Notwendige und hinreichende Extremwertbedingungen . . 348
8.1.2 Beispiele . . . 352
8.2 Extremwerte unter Nebenbedingungen . . . 354
8.2.1 Allgemeine Aufgabenformulierung . . . 355
8.2.2 Die Eliminationsmethode . . . 356
8.2.3 Die Lagrange-Methode . . . 363
8.2.4 Interpretation der Lagrange'schen Multiplikatoren 370
8.3 Methode der kleinsten Quadratsumme . . . 372
8.3.1 Problemstellung. Lineare Regression . . . 372
8.3.2 Allgemeinere Ansatzfunktionen . . . 379

9 Integralrechnung 383
9.1 Das unbestimmte Integral . . . 384
9.1.1 Integration von Funktionen einer Veränderlichen . . . 384
9.1.2 Integrationsregeln . . . 385
9.2 Das bestimmte Integral . . . 387
9.2.1 Integralbegriff für Funktionen einer Variablen . . . 387
9.2.2 Integrier barkeit. Eigenschaften bestimmter Integrale . . . 390
9.2.3 Numerische Integration . . . 392
9.2.4 Uneigentliche Integrale . . . 394
9.2.5 Doppelintegral . . . 396
9.3 Anwendungen der Integralrechnung . . . 399
9.3.1 Untersuchung von Wachstumsprozessen . . . 400
9.3.2 Kurzer Ausblick auf Differenzialgleichungen . . . 403

Lösungen zu den Aufgaben 405

Klausurbeispiel 425

Literaturverzeichnis 431

Sachwortverzeichnis 432